Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Rémi Jaoui

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 2
Abgabe: 09.11.2021

Aufgabe 1 (12 Punkte)**.**
Der Bairescher Kategoriensatz besagt, dass der Schnitt abzählbarer vielen dichten, offenen Teilmengen eines metrischen vollständigen Raumes wieder dicht ist, und insbesondere nichtleer.

Sei (X, d) ein metrischer vollständiger Raum.

(a) Zeige, dass die metrische Topologie auf X Hausdorff ist.

(b) Zeige, dass ein Element x aus X genau dann isoliert ist, wenn die Menge $X \setminus \{x\}$ nicht dicht in X ist.

(c) Schließe daraus, dass X überabzählbar sein muss, wenn X keine isolierten Punkte besitzt.

Sei nun $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ derart, dass $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ vollständig ist.

(d) Zeige, dass jeder Punkt aus $\mathbb{Q}$ isoliert ist.

(e) Zeige, dass es ein k aus $\mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$\frac{1}{k} \leq |x| \quad \text{für alle } 0 \neq x \in \mathbb{Q}$$

(f) Schließe daraus, dass der Absolutbetrag trivial ist. Insbesondere muss es Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bezüglich der p-adischen Norm geben, welche keinen Limes in $\mathbb{Q}$ besitzen.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Sei R ein kommutativer Ring derart, dass die Kollektion von Hauptidealen von R linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(a) Zeige, dass jedes endlich erzeugte Ideal von R ein Hauptideal ist.

(b) Zeige, dass auch die Kollektion von Idealen von R linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(c) Schließe daraus, dass R genau ein maximales Ideal besitzt.

(d) Wir nehmen an, dass R ein Integritätsbereich ist. Zeige für jedes Element x aus dem Quotientenkörper K, dass x oder x^{-1} in R liegt.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.